Universidad de Sucre
Visible para todos

TRABAJO 1 – Cálculo III
Programa de Lic. en Matemáticas
Prof. Juan Deavila

1. Hallar el dominio de las siguientes funciones y realizar un bosquejo en el plano cartesiano o en el espacio tridimensional:

   a) $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$
   b) $f(x, y) = \ln(y - x)\sqrt{x - y}$
   c) $f(x, y) = \sqrt{xy}$
   d) $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$
   e) $f(x, y, z) = \dfrac{e^{xyz}}{\sqrt{xyz}}$

2. Sketch several level curves for the following functions:

   a) $f(x, y) = 2x + 3y$
   b) $f(x, y) = x^2 + y$
   c) $f(x, y) = 2x + 3y$
   d) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
   e) $f(x, y) = x^2 - y^2$

3. Sketch the graphs of the functions:

   a) $f(x, y) = x$
   b) $f(x, y) = \operatorname{sen}(x)$
   c) $f(x, y) = y^2$
   d) $f(x, y) = |x| + |y|$
   e) $f(x, y) = 6 - x - 2y$

4. Find (if it exists) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y^2}{x^3 + y^3}$.

5. Demostrar si existe ó no existe cada uno de los siguienes límites:

   a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 - x^3y^3 + y2}{x^2 + y^2}$.
   b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y^2 - 2x^2y + x^2}{y^2 + x^2 - 2y + 1}$
   c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y^2}{2x^4 + y^4}$
   d) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \dfrac{2x^2 - xy}{4x^2 - y^2}$

6. Hallar una condición para los números enteros no-negativos m, n y p de tal manera que el siguiente límite exista: (debe probar su respuesta)

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^m y^n}{(x^2 + y^2)^p}$$

.

7. Mostrar si la función dada es continua o no en el punto indicado. Además, si la función es discontinua en el punto dado, indicar si es posible o no remover tal discontinuidad.

   a) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}^3(y)}{1-\cos(x^2+y^2)}$; $(x,y)=(0,0)$.

   b) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2-y^2}$; $(x,y)=(1,1)$.

   c) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x-y)}{\cos(x+y)}$; $(x,y)=(0,0)$.

   d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$; $\quad (x,y)=(0,0)$.

8. Demuestre que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=2x^3$ es diferenciable en $x_0=1$. Dar la derivada de la función f en x_0 y el respectivo jacobiano. (Usar la definición de diferenciabilidad de funciones de varias variables)

9. Demuestre que la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y)=(\operatorname{sen} y, xy)$ es diferenciable en $x_0=(0,1)$. Dar la derivada de la función f en x_0 y el respectivo jacobiano. (Usar la definición de diferenciabilidad de funciones de varias variables)

10. Determinar las primeras derivadas parciales de las siguientes funciones en el punto indicado:

    a) $f(x,y)=\tan^{-1}(y/x)$; $\quad (x,y)=(-1,1)$.
    b) $f(x,y)=\operatorname{sen}(x\sqrt{y})$; $\quad (x,y)=(\pi/3,4)$.
    c) $g(x,y,z)=\dfrac{xz}{y+z}$; $\quad (x,y,z)=(1,1,1)$.
    d) $g(x,y,z)=\ln(1+e^{xyz})$; $\quad (x,y,z)=(2,0,-1)$.
    e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3-y^3}{x^2-2y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$; $\quad (x,y)=(0,0)$.
    f) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$; $\quad (x,y)=(0,0)$.

11. Determinar $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$ (si existen) para la función f definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^3+y)\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

12. Calcular $f_x(x,y)$ para la función f del ejercicio anterior.¿ Es continua la función f_x en el punto $(0,0)$.?

13. Determinar $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$ (si existen) para la función f definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

14. Definir f_x y f_y para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ siendo f la funcón del ejercicio anterior.¿ Son continuas las funciones f_x y f_y en el punto $(0,0)$.?

15. Si $x = e^s \cos t$, $y = e^s \operatorname{sen} t$, $z = u(x, y) = v(s, t)$ demostrar que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = (x^2 + y^2)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

16. Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ dado que $z = txy^2$, $x = t + \ln(y + t^2)$ y $y = e^t$.

17. Usaar el cambio de variables $\xi = x + ct$, $\eta = x$ para transformar la ecuación diferencial parcial (EDP)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial u}{\partial x}, \quad c \text{ constante}$$

en la EDP

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = 0,$$

donde $v(\xi, \eta) = v(x + ct, x) = u(x, t)$. Determinar la solución $u(x, t)$ de la EDP original.

Nota: Estos son algunos ejercicios para el trabajo del primer corte. Se debe presentar el día 12 de Marzo. Se debe trabajar en grupos de mínimo 5 estudiantes. Recuerde que la calificación de este trabajo representa el 30 % de la nota final para el primer corte.